Analysis I PVK - Lösungen

Nicolas Lanzetti
lnicolas@student.ethz.ch

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen

1. (a) $y = (3x+4)^3 \leftrightarrow \sqrt[3]{y} = 3x+4 \leftrightarrow x = \frac{1}{3} \cdot (\sqrt[3]{y} - 4) = f_1^{-1}(y)$
   $D(f_1) = W(f_1) = \mathbb{R}$. Daraus folgt: $D(f_1^{-1}) = W(f_1^{-1}) = \mathbb{R}$

   (b) $f_2(x) = \sin(2x)$ ist im Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = D(f)$ injektiv und besitzt (auf diesem Intervall) deshalb eine Inverse.
   $y = \sin(2x) \leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \arcsin(y) = f_2^{-1}(y)$
   $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = W(f_2^{-1})$ und $W(f_2) = [-1,1] = D(f_2^{-1})$

2. (a) $f_1 = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ Somit ist $g_1(x) = 1$ eine Asymptote von $f_1(x)$. Es gilt nämlich:
   $\lim_{x\to\pm\infty}(f_1(x) - g_1(x)) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
   Die Funktion hat ausserdem eine Polgerade: $x = 0$ (da $\lim_{x\to 0} f_1(x) = \pm\infty$)

   (b) $f_2(x) = \frac{x^2-2}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{-1}{x-1} = x + 1 - \frac{1}{x-1}$
   Somit ist $g_2(x) = x+1$ eine Asymptote von $f_2(x)$. Es gilt nämlich:
   $\lim_{x\to\pm\infty}(f_2(x) - g_2(x)) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x + 1 - \frac{1}{x-1} - (x+1)\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x-1}\right) = 0$
   Die Funktion hat ausserdem eine Polgerade: $x = 1$ (da $\lim_{x\to 1} f_2(x) = \pm\infty$)

   (c) $f_3(x) = \frac{3x^3-x+2}{x^2+3x+4} = \frac{3x(x^2+3x+4)}{x^2+3x+4} + \frac{-9x^2-13x+2}{x^2+3x+4} = 3x - \frac{9(x^2+3x+4)}{x^2+3x+4} + \frac{14x+38}{x^2+3x+4} = 3x - 9 + \frac{14x+38}{x^2+3x+4}$
   Somit ist $g_3(x) = 3x - 9$ eine Asymptote von f_3. Es gilt nämlich:
   $\lim_{x\to\pm\infty}(f_3(x) - g_3(x)) = \lim_{x\to\pm\infty}(3x - 9 + \frac{14x+38}{x^2+3x+4} - 3x + 9) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{14x+38}{x^2+3x+4}\right) = 0$

3. Siehe Analysis I, Schellübung 1, Aufgabe 3 (D-ITET)

4. Siehe Analysis I, Serie 3, Aufgabe 1 (D-ITET)

5. Siehe Analysis I, Sere 3, Aufgabe 3 (D-ITET)

6. Siehe Analysis I, Sere 6, Aufgabe 4 (D-ITET)

7. Mit Polynomdivision bekommt man
   $$f(x) = x^2 + 3x + 2 + \frac{5x}{x^3+1}$$
   Somit ist $x^2 + 3x + 2$ eine Asymptote ($x \to \pm\infty$)

8. Mit
   $$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad h = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - m \cdot x)$$
   bekommt man $m = 1$ und $h = \frac{a}{3}$. Die Gerade
   $$y = x + \frac{a}{3}$$
   ist somit eine Asympote von $f(x)$.

2 Differentialrechnung

1. (a) $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{(x\cdot\ln(x))} = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln(x))}$ (da e^x stetig ist)
   $\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{1} = 0$
   Deshalb ist $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln(x))} = e^0 = 1$
   Bemerkung. Das zeigt nicht, dass $0^0 = 1$. Es geht nur um einen Grenzwert.
   (b) 0
   (c) 1/2
   (d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \overset{y=\frac{\pi}{2}-x}{=} \lim_{y\to 0} \frac{y}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right) =$
   $= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin(y)}\cos(y) = = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\sin(y)}{y}} \cdot \lim_{y\to 0}\cos(y) = \frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}} \cdot 1 = \frac{1}{1}\cdot 1 = 1$

2. (a) 1
   (b) 1/8 (Siehe Analysis I, Serie 3, Aufgabe 3 (D-MAVT))
   (c) -1 (Siehe Analysis I, Serie 3, Aufgabe 3 (D-MAVT))
   (d) 1/2 (Siehe Analysis I, Serie 3, Aufgabe 3 (D-MAVT))

3. (a) 1 (Siehe Analysis I, Serie 3, Aufgabe 3 (D-MAVT))
   (b) 0 (Siehe Analysis I, Serie 7, Aufgabe 1 (D-MAVT))
   (c) $e^{-1/2}$ (Siehe Analysis I, Serie 7, Aufgabe 1 (D-MAVT))
   (d) 3 (Siehe Analysis I, Serie 7, Aufgabe 1 (D-MAVT))

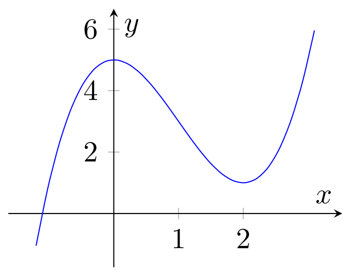
4. (a) $g_1(x) = 1-x \qquad h_1(x) = x^5 \qquad g_1'(x) = -1 \qquad h_1'(x) = 5\cdot x^4$
   $f_1'(x) = (h_1(g_1(x)))' = h_1'(g_1(x))\cdot g_1'(x) = 5\cdot(1-x)^4\cdot(-1) = -5\cdot(1-x)^4$
   (b) $g_2(x) = x^{\frac{1}{2}} + \cos(x) \qquad h_2(x) = x^{18} \qquad g_2'(x) = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} - \sin(x) \qquad h_2'(x) = 18\cdot x^{17}$
   $f_2'(x) = (h_2(g_2(x)))' = h_2'(g_2(x))\cdot g_2'(x) = 18\cdot(\sqrt{x}+\cos(x))^{17}\cdot(\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} - \sin(x))$
   (c) $f_3(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\cdot\ln(x)}$
   $g_3(x) = x\cdot\ln(x) \qquad h_3(x) = e^x \qquad g_3'(x) = \ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} \qquad h_3'(x) = e^x$
   $f_3'(x) = (h_3(g_3(x)))' = h_3'(g_3(x))\cdot g_3'(x) = e^{x\cdot\ln(x)}\cdot(\ln(x)+1) = x^x\cdot(\ln(x)+1)$
   (d) $f_4(x)$ ist die Inverse von $h_4(x) = \frac{1}{2}\cdot\cos(x) \qquad h_4'(x) = -\frac{1}{2}\cdot\sin(x)$
   $f_4'(x) = \frac{1}{h_4'(f_4(x))} = \frac{1}{-\frac{1}{2}\cdot\sin(\arccos(2x))} = -2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(2x))}} = -2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

5. (a) $e^{\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{2x^{5/2}}\right)$
   (b) $14/5\cdot(1-7x)^{-7/5}$
   (c) $2014\cdot\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{2013}\cdot\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\right)$

6. (a) 1
   (b) $-\sin(\sin x)\cdot\cos x + \cos(\cos x)\cdot\sin x$
   (c) $-3x^2\cdot\left(1+(\cot(x^3))^2\right)$

7. Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 6x = x\cdot(3x-6) \qquad f''(x) = 6x - 6$

- $f'(0) = 0$ und $f''(0) < 0$, so ist $x = 0$ eine (lokale) Maximalstelle (Maximum $f(0) = 5$)
- $f'(2) = 0$ und $f''(2) > 0$, so ist $x = 2$ eine (lokale) Minimalstelle (Minimum $f(2) = 1$)
- $f''(1) = 0$, $f(x)$ konkav im $(-\infty, 0)$ und konvex im $(0, \infty)$, so ist $x = 1$ ein Wendepunkt



8. (a) $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$
   (b) $y = \frac{x}{6} + \frac{7}{6}$
   (c) $y = 2x + 2$ (Tangente zu einer Gerade ist wieder die Gerade)
   (d) $y = 2x + 2$ (Tangente zu einer Gerade ist wieder die Gerade)

   (Siehe Analysis I, Serie 5, Aufgabe 5 (D-MAVT))

9. Max: $I_{\text{max}} = 2$ bei $t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$
   Min: $I_{\text{min}} = -2$ bei $t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$
   (Siehe Analysis I, Serie 7, Aufgabe 3 (D-MAVT))

10. Siehe Analysis I, Serie 8, Aufgabe 2 (D-MAVT)

11. Der Kosinus von dem Winkel ist gegeben durch

$$\cos(\alpha(x)) = \frac{2x+1}{\sqrt{(x+1)\cdot(4x+1)}}$$

Da $\cos(x)$ ist maximal, wenn $\cos^2(x)$ kann man das Maximum der Funktion $\cos^2(\alpha(x))$ bestimmen:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x+1)^2}{(x+1)(4x+1)}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

Somit findet man

$$\alpha \in \left(0, \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right] \approx (0, 19.47^\circ]$$

(Siehe Analysis I, Serie 8, Aufgabe 1 (D-MAVT))

12. Siehe Analysis I, Serie 8, Aufgabe 1 (D-ITET)

13. Siehe Analysis I, Serie 8, Aufgabe 3a (D-ITET)

14. Siehe Analysis I, Serie 8, Aufgabe 3b (D-ITET)

3 Folgen

1. Es gilt

$$a_n = \frac{1}{n^2} \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \quad (n \geq 1)$$

   Die Folge $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$ ist monoton fallend und beschränkt, so konvergiert sie (gegen $\frac{1}{2}$).

2. (a) Siehe Analysis I, Schnellübung 3, Aufgabe 4 (D-ITET)

   (b) Siehe Analysis I, Serie 5, Aufgabe 8b (D-ITET)

4 Reihen

1. Der erste Vergleichkriterium liefert

$$\frac{1}{\sqrt{n}\cdot(n+1)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}\cdot n} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Da die Riehe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ konvergent ist, konvergiert nach dem Vergleichkriterium auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot(n+1)}$.

2. Mit dem Vergleichkriterium bekommt man

$$\frac{3n^2+5}{n^4+2n^2+3} \leq \frac{3n^2+5}{n^4} = \frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^4}$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^4}$ sind konvergent und somit ist auch ihre Summe konvergent. Nach dem Vergleichskriterium konvergiert also auch die gegebene Reihe.

3. Der Quotientenkriterium lautet

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot(n+1)^n}{(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n!}{n^n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= e \end{aligned}$$

Da $L>1$ ist die gegebene Reihe divergent.

4. (a) Der Quotientenkriterium lautet

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

somit ist die Reihe konvergent.

(b) Der Quotientenktriterium lautet

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}\cdot n!}{4^n\cdot(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n+1} = 0$$

deshalb ist die Reihe konvergent.

5. Das Wurzelkriterium liefert

$$R = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left(n^{1/n}-1\right) = e^{\frac{1}{n}\cdot\ln n}-1 = e^0-1 = 0$$

Da $R=0$ ist die Reihe konvergent.

6. (a) Mit dem Wurzelkriterium bekommt man

$$R = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{1-\underbrace{5/n}_{\to 0}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Da $R<1$ ist die Reihe konvergent.

(b) Mit dem Wurzelkriterium bekommt man

$$R = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$$

Da $R > 1$ divergiert die Reihe.

5 Potenzreihen

1. (a) $(-1/2, 1/2)$
   (b) $(1-e, 1+e)$
2. Siehe Analysis I, Serie 6, Aufgabe 1 (D-ITET)
3. Siehe Analysis I, Serie 6, Aufgabe 1 (D-ITET)
4. Siehe Analysis I, Serie 6, Aufgabe 2 (D-ITET)
5. Siehe Lösungen Prüfung HS04, Aufgabe 7
6. Wir wissen, dass
$$\operatorname{arctanh}(x) + C = \int \frac{dx}{1-x^2}$$
Mit Hilfe der geometrischen Reihe:
$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \qquad \text{für } |x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$$
Somit ist
$$\operatorname{arctanh}(x) + C = \int \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
Wegen $\operatorname{arctanh}(0) = 0$ ist $C = 0$ und folgt
$$\operatorname{arctanh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$
Der Konvergenzradius der Folge ist $\rho = 1$ (aus der geometrischen Reihe).
7. Mit Partialbruchzerlegung bekommt man
$$\frac{x-1}{(x^2+1)\cdot(x+1)} = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}$$
Mit Hilfe der geometrischen Reihe:
$$\frac{x}{1+x^2} = x \cdot \frac{1}{1-(-x^2)} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{2n+1}$$
$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n$$
Somit ist
$$\frac{x-1}{(x^2+1)\cdot(x+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot (x^{2n+1} - x^n)$$
Für den Konvergenzbereich gilt:
   - $|-x^2| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < \sqrt{1} = 1$

- $|-x| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < 1$

Daraus folgt, dass die Potenzreihe für $x \in [-1, 1]$ konvergiert ($\rho = 1$).

8. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{48} + \dots$ (siehe *Stammbach*, Seite 200)
9. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot (x^{2n+1} + x^{2n}) + x^n$ (Siehe Analysis I, Schnellübung 5, Aufgabe 1 (D-ITET))
10. $x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + \dots$ (siehe *Stammbach*, Seite 209)
11. Mit
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
bekommt man
$$\sin(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{(x^3)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{6n+3}}{(2n+1)!}$$

6 Komplexe Zahlen

1. (a) $\frac{32}{41} + \frac{i}{41}$
   (b) $-1/4$
   (c) $\sqrt{e}\cos(\sqrt{3}/2) - i\sqrt{e}\sin(\sqrt{3}/2)$

   (Siehe Analysis I, Zusätzliche komplexe Zahlen, Aufgabe 1)

2. Siehe Analysis I, Zusätzliche komplexe Zahlen, Aufgabe 3

3. Die Nullstellen sind $1 \pm i, \pm 1$.
   Das Polynom kann als $(x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 - 1)$ geschrieben werden.

4. $z^2 + z + 1 = 0 \to z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$
   In Polarkoordinaten: $z_1 = e^{i \cdot 2\pi/3}, z_2 = e^{-i \cdot 2\pi/3}$

5. (a) $-2^{50} + i2^{50}$ (Siehe Analysis I, Zusätzliche komplexe Zahlen, Aufgabe 4)
   (b) Siehe Analysis I, Zusätzliche komplexe Zahlen, Aufgabe 6a
   (c) Siehe Analysis I, Zusätzliche komplexe Zahlen, Aufgabe 6b

6. $z_1 = \sqrt{5} \cdot e^{i/2 \cdot (\arctan(4/3) + \pi)}, z_2 = \sqrt{5} \cdot e^{i/2 \cdot (\arctan(4/3) + 3\pi)}$
   (Siehe Analysis I, Schnellübung 3, Aufgabe 2b (D-ITET))

7 Differentialgleichungen

1. $y(x) = \frac{1}{\cos(x)} - 2\cos(x)$ (Siehe Analysis I, Schnellübung 5, Aufgabe 3 (D-ITET))
2. Siehe Analysis I, Serie 10, Aufgabe 3 (D-ITET)
3. Siehe Analysis I, Serie 10, Aufgabe 3 (D-ITET)
4. (a) Ja
   (b) Nein
5. Wir betrachten zuerst die homogene DGL und wir machen einen Euler Ansatz
   $$y_h(x) = C \cdot e^{\lambda \cdot x}$$
   Durche Einsetzen bekommen wir das charakteristiche Polynom
   $$\lambda^3 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot (\lambda^2 + 1) = 0$$
   Die Nullstellen sind 0 und $\pm i$, somit ist die homogene Lösung
   $$y_h(x) = C_1 + A \cdot \cos(x) + B \cdot \sin(x)$$
   Für die partikuläre Lösung machen wir den Ansatz $y_p(x) = A \cdot x + B$ und man bekommt
   $$y_p(x) = x$$
   Die allgemine Lösung ist somit
   $$y(x) = C_1 + A \cdot \cos(x) + B \cdot \sin(x) + x$$
6. Siehe Lösungen Prüfung HS04, Aufgabe 4
7. Siehe Analysis I, Serie 11, Aufgabe 2a (D-ITET)
8. Siehe Analysis I, Serie 11, Aufgabe 2b (D-ITET)
9. $y(x) = e^{-x} \cdot \cos(x) - 1$
10. Man sieht, dass
    $$(\sin(x) \cdot y'(x) + \cos(x) \cdot y(x)) = (y(x) \cdot \sin(x))'$$
    Die Lösung der DGL ist somit
    $$(y(x) \cdot \sin(x))' = e^x \quad \Rightarrow \quad y(x) \cdot \sin(x) = \int e^x \, dx \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{e^x + C}{\sin(x)}$$
11. $y(x) = \frac{1}{2} + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2$ (Euler'sche Differentialgleichung)
12. (a) $u(r) = -\frac{1}{2}r + \frac{1}{6r} + \frac{1}{3}r^2$
    (b) $u(r) = C_1 r + \frac{1}{3}r^2$
    (Siehe Analysis II, Serie 12, Aufgabe 6 (D-MAVT))
13. Siehe Analysis I, Serie 11, Aufgabe 4 (D-ITET)

8 Integralrechnung

1. (a) $\tan x - x + C$ (Siehe Analysis I, Serie 11, Aufgabe 1d (D-MAVT))
   (b) $\pi^2 - 4$ (Siehe Analysis I, Serie 11, Aufgabe 1f (D-MAVT))

2. (a) Mit der Substitution $u = x^3 + 3x + 2$ bekommt man: $\frac{1}{27}(x^3 + 3x + 2)^9$
   (b) Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung bekommt man: $\frac{1}{4} \cdot \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$
   (Siehe Analysis I, Zusätzliche Serie Integrale, Aufgabe 3a (D-MAVT))

3. (a) $-x \cdot \cot x + \log|\sin x| + C$ (Siehe Analysis I, Serie 11, Aufgabe 1a (D-MAVT))
   (b) $2 \cdot \arctan \sqrt{e^x - 1} + C$ (Siehe Analysis I, Serie 11, Aufgabe 1b(D-MAVT))
   (c) $1/3 \cdot x^3 \cdot \log x - 1/9 \cdot x^3 + C$ (Siehe Analysis I, Serie 11, Aufgabe 1c (D-MAVT))

4. (a) $\frac{1}{2} \cdot (\ln|1-x| - \ln|1+x|) + x + C = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + x + C$
   (b) $2\arctan(x) + 2\ln|1-x| - \ln|1+x^2| + C = 2\arctan(x) + \ln\left(\frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right) + C$
   (c) $\frac{2}{1-x} + 3\ln|x-1| + \ln|1+x| + C$

5. Das Integral lässt sich berechnen als

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |t|\,dt &= \int_{-1}^{0} (-t)\,dt + \int_{0}^{1} t\,dt \\ &= -\frac{t^2}{2}\bigg|_{-1}^{0} + \frac{t^2}{2}\bigg|_{0}^{1} \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

   Alternativ: $|t|$ ist gerade, also

$$\int_{-1}^{1} |t|\,dt = 2 \cdot \int_{0}^{1} |t|\,dt = 2 \cdot \underbrace{\int_{0}^{1} t\,dt}_{1/2} = 1$$

6. (a) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{\xi\to\infty} \int_0^\xi \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{\xi\to\infty} \arctan x\big|_0^\xi = \lim_{\xi\to\infty} \arctan(\xi) = \frac{\pi}{2}$
   (b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\xi\to 1^-} \int_0^\xi \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\xi\to 1^-} \arcsin(x)\big|_0^\xi = \lim_{\xi\to 1^-} \arcsin(\xi) = \frac{\pi}{2}$

7. (a) ∞ (Siehe Analysis I, Serie 13, Aufgabe 8a (D-MAVT))
   (b) $1/\ln 2$ (Siehe Analysis I, Serie 13, Aufgabe 8b (D-MAVT))
   (c) ∞ (Siehe Analysis I, Serie 13, Aufgabe 8c (D-MAVT))

8. (a) $2/e$ (Siehe Analysis I, Schnellübung 7, Aufgabe 2 (D-ITET))
   (b) $1/2$ (Siehe Analysis I, Schnellübung 7, Aufgabe 2 (D-ITET))

9. (a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (Siehe Analysis I, Schnellübung 7, Aufgabe 2 (D-ITET))
   (b) $(\log(\log(10))^{-1}$ (Siehe Analysis I, Schnellübung 7, Aufgabe 2 (D-ITET))

10. $F'(x) = f(\sin x) \cdot \cos x$ (Hauptsatz der Integralrechnung)

11. $3/2$ (Siehe Analysis I, Serie 12, MC Aufgabe 1 (D-MAVT))

12. $2\sqrt{2}$ (Siehe Analysis I, Serie 12, Aufgabe 1 (D-ITET))